Abwechslungsreiche Unterrichtseinstiege

CHRISTOPH ABLEITINGER, WIEN

Einerseits ist der Einstieg in ein neues Unterrichtsthema bzw. auch der Einstieg in eine einzelne Unterrichtsstunde ohne Zweifel wichtig für die Motivation der Schülerinnen und Schüler, sich mit den bevorstehenden Inhalten auseinander zu setzen. Andererseits muss ein Einstieg von der Lehrkraft aber so ausgewählt werden, dass er didaktisch sinnvoll und für den weiteren Unterrichtsverlauf und seine Ziele tragfähig ist. Der vorliegende Aufsatz soll eine bunte Palette an möglichen Einstiegen in Unterrichtsstunden bzw. in neue Unterrichtsthemen präsentieren, sie didaktisch beleuchten und unterrichtspraktische Hinweise geben.

1. Vom passenden und unpassenden Einsatz bestimmter Einstiege

1.1 Ein Einstieg in die elementare Algebra

Man findet in Schulbüchern bisweilen interessante Rätsel, die mit Hilfe von Variablen leicht gelöst werden können. Manche der Schulbücher stellen solche Rätsel sogar an den Beginn des entsprechenden Kapitels im Buch. So findet man beispielsweise im siebenten Band der deutschen Schulbuchreihe „Einblicke“ ein sogenanntes Knopfrätsel am Beginn des Kapitels „Variablen als Platzhalter“ (siehe Abb. 1).

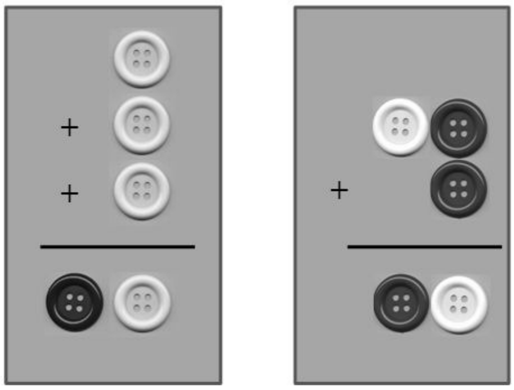

Abb. 1: Knopfrätsel als Einstieg in das Thema „Variablen“

Zusätzlich zu dem Bild wird im Schulbuch auch noch erklärt, dass gleiche Knöpfe auch gleiche Ziffern bedeuten. Das Rätsel soll laut Arbeitsauftrag an die Schülerinnen und Schüler durch Probieren gelöst werden. Anschließend sollen auch noch selbst ähnliche Rätsel erfunden und von den jeweiligen Sitznachbarn gelöst werden. In einem hervorgehobenen Kasten wird schließlich der Begriff „Variable“ benutzt (Elbs et al. 2007, S. 126):

> „Als Platzhalter oder Variablen werden unterschiedliche Zeichen […] benutzt. In der Mathematik werden als Variablen häufig Buchstaben verwendet […]“.

Es geht den Schulbuchautoren also offenbar darum deutlich zu machen, dass Symbole und Buchstaben als Platzhalter für konkrete Ziffern in Zahlen benutzt werden können. Für die Darstellung einer zweistelligen Zahl – wie sie auch im Knopfrätsel vorkommt – benötigt man allerdings zwei unterschiedliche Variable. Diese zusätzliche Schwierigkeit sollte m. E. nicht im Zentrum des Einstiegs in den Algebraunterricht der Sekundarstufe I stehen. Selbst das Schulbuch nutzt diesen Variablengebrauch später nicht mehr. Es ist natürlich unbestritten, dass Variablen sehr wohl dazu

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 48, 2015, S 1 - 13

verwendet werden können, solche oder ähnliche Rätsel zu lösen. Exemplarisch sei dies am linken Rätsel in Abb. 1 verdeutlicht:

$$3a = 10b + a$$
$$\Leftrightarrow a = 5b$$

Damit bleibt nur noch die Möglichkeit $a = 5$ und $b = 1$. Um das Knopfrätsel auf diese Weise zu lösen müssten die Schülerinnen und Schüler allerdings schon ein grundlegendes Verständnis für den Einsatz von Variablen besitzen und müssten dieses mit ihrem Wissen über das Dezimalsystem vernetzen. Auch wenn das Verständnis über Stellenwertsysteme schon in früheren Klassenstufen aufgebaut wurde, würde diese zusätzliche Vernetzungsanforderung die Sache unnötig verkomplizieren. Außerdem führt das Knopfrätsel zu einer Gleichung in zwei Variablen, was die Angelegenheit weiter erschwert. Zusammenfassend kann man also sagen, dass solche Rätsel prinzipiell ein schöner Unterrichtsinhalt sind, der sich auch wunderbar mit dem Einsatz von Variablen verbinden lässt, allerdings muss die zeitliche Positionierung im Unterricht gründlich überdacht werden. An den Beginn des Algebraunterrichts scheint das vorliegende Knopfrätsel jedenfalls nicht zu passen.

1.2 Verführungsunterricht vermeiden

Nicht jeder effektvolle Einstieg in ein neues Thema lässt sich aus didaktischer Sicht rechtfertigen. Selbstverständlich ist es zu begrüßen, wenn Lehrkräfte gerade für den Einstieg ein verblüffendes Phänomen oder eine interessante Unterrichtsmethode wählen und den Unterricht entsprechend aufbereiten. Allerdings darf dieser Einstieg nicht Selbstzweck sein. Grell und Grell (1983) haben schon vor vielen Jahren vor einem „Verführungsunterricht gewarnt", indem sie wie folgt schreiben:

> „Lehrer bemühen sich, die Schüler durch irgendein eindrucksvolles Erlebnis, das sie meist an den Stundenbeginn zu legen versuchen, so stark zu motivieren, daß die Schüler gar nicht mehr merken, daß sie etwas lernen sollen und worum es sich genau handelt".

Sie werden dabei sogar noch konkreter:

> „Sie werden dabei feststellen, daß auf viele dieser Einstiege Namen wie die folgenden passen: Werbetrick, alberner oder lustiger Gag, Strohfeuer, Verführungsversuch, bewußtes Anlügen, Theaterspielen, vom Thema ablenken, Effekthascherei […]".

Auch wenn diese beiden Zitate etwas hart und pauschal klingen, steckt in ihnen ein wahrer Kern, den es bei der Auswahl eines Unterrichtseinstiegs unbedingt zu beachten gilt. Positiv formuliert könnte man auch einen Kriterienkatalog für gute Einstiege angeben. Einstiege sollen

- motivierend sein,
- Anknüpfung an Bekanntes ermöglichen, aber dosiert von vertrauten Inhalten abweichen,
- zuerst das Phänomen in den Blick nehmen, erst dann die konkreten Begriffe,
- nach Möglichkeit Schülertätigkeit anregen,
- nicht alles verraten, sondern eher Fragen aufwerfen,
- nicht Selbstzweck sein.

1.3 Bemerkungen zu den vorgestellten Einstiegen

In den folgenden Abschnitten wird eine Fülle von Ideen für Unterrichtseinstiege präsentiert. Dabei handelt es sich nicht durchgehend um Einstiege in neue Unterrichtsthemen, sondern manchmal auch einfach um einen lokalen Einstieg in eine einzelne Unterrichtsstunde. Jedenfalls wurde bei der Auswahl berücksichtigt, dass die angesprochenen Inhalte zentral für die Mathematik in den Sekundarstufen sein sollen. Es sollen also bewusst keine „Show-Inhalte" oder Ideen für

Spezialunterricht in Wahlpflichtfächern oder in „Weihnachtsstunden“ sein. Der vorliegende Artikel versteht sich vielmehr als Ideenlieferant für den Regelunterricht, sowohl in inhaltlicher wie auch in methodischer Hinsicht. Manche der Einstiege werden dem interessierten Leser von Fachzeitschriften bekannt vorkommen. Sie wurden dem obigen Kriterienkatalog folgend ausgewählt und sollen im Rahmen dieses Aufsatzes in Erinnerung gerufen, didaktisch reflektiert und durch praktische Hinweise für die Umsetzung im Unterricht begleitet werden. Ergänzt werden die Einstiege aus der Literatur durch selbst entworfene und erprobte Ideen des Autors. Insgesamt ergibt sich dadurch eine bunte Vielfalt quer durch die wichtigsten Themen beider Sekundarstufen.

Die vorgestellten Unterrichtsentwürfe können in der präsentierten Form, angepasst an den eigenen Unterrichtsstil, übernommen werden. Allerdings können die dabei verwendeten Unterrichtsmethoden auch auf andere Unterrichtsinhalte übertragen werden. Der Kreativität und dem Einfallsreichtum der Lehrkraft sollen dabei keine Grenzen gesetzt werden. Neben der detaillierten Vorstellung einzelner Unterrichtseinstiege werden dazu an einigen Stellen weitere Ideen für den Einsatz mancher Methoden angedeutet.

2 Mathematische Vorstellungsübungen

Im aus der Dissertation von Christof Weber entstandenen Buch „Mathematische Vorstellungen bilden“ (Weber 2007) wird das Unterrichtsinstrument „mathematische Vorstellungsübung“ vorgestellt, an einigen konkreten Beispielen demonstriert, mit didaktischem Gespür und sorgfältig ausgewählten Werkzeugen und Theorien analysiert und schließlich von einem empirischen Standpunkt aus reflektiert. Vorstellungsübungen eignen sich insbesondere für den Einstieg in ein neues Unterrichtsthema, stellen sie doch ein ganz konkretes Phänomen ins Zentrum der Betrachtungen – oder besser gesagt – ins Zentrum der Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern. Sie erfüllen automatisch alle oben aufgeführten Kriterien für gute Einstiege, wie man im Folgenden an einem Beispiel sehen kann.

2.1 Eine Vorstellungsübung zum Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck

Die folgende Vorstellungsübung passt inhaltlich – berücksichtigt man den österreichischen Lehrplan – am besten in die sechste Schulstufe. Sie kommt eigentlich ohne besondere inhaltliche Voraussetzungen aus, Grundbegriffe zum Thema „Dreieck“ (Winkel, Kanten, Eckpunkte, Uhrzeigersinn) erleichtern aber natürlich einerseits die Vorstellungen, andererseits aber auch das Sprechen im Anschluss an die Vorstellungsübung.

Zu Beginn einer Vorstellungsübung werden die Schülerinnen und Schüler gebeten, ihre Augen zu schließen. Je nach Bedarf kann eine Entspannungsübung vorgeschaltet werden, um die Konzentration bei der Vorstellungsübung zu erleichtern und um eine angenehme Atmosphäre zu schaffen. Danach liest die Lehrkraft den folgenden Text vor (wörtlich übernommen aus Weber 2007):

> „Stell dir vor, wie du auf einer Wiese gehst. Da siehst du vor dir drei Stoffstreifen liegen, die die Form eines großen Dreiecks bilden. Stell dich so mit deinen Füßen mitten auf einen Streifen, dass das Dreieck vor dir liegt, und strecke deine Arme seitwärts nach rechts und links aus: Sie liegen über einem Streifen – das heißt einer Kante – des Dreiecks. …
>
> Bewege dich nun seitwärts, Fuß neben Fuß setzend, auf deinem Streifen in Richtung des rechten Arms, bis du an eine Ecke kommst, wo zwei Stoffstreifen zusammenlaufen. …
>
> Jetzt ragt der rechte Arm über die Figur hinaus, und der linke liegt über der eben begangenen Kante des Dreiecks. Dreh dich langsam, mit starr ausgestreckten Armen, um deine Längsachse so, dass dieser linke Arm zuerst in die Figur hineinzeigt, so lange, bis er über dem nächsten Stoffstreifen des Dreiecks zu liegen kommt. …

In die Richtung dieses Arms bewegst du dich wieder, Fuß neben Fuß setzend, bis zur zweiten Ecke. Jetzt ragt der linke Arm über das Dreieck hinaus, und der rechte liegt über der eben begangenen Kante des Dreiecks. Dreh dich wieder langsam so, dass der rechte Arm zuerst in das Dreieck hineinzeigt, bis er über der nächsten Kante zu liegen kommt. …

Geh auf diese Art weiter, bis du an den Ausgangspunkt zurückkommst. …

Wie stehst du jetzt? … Was ist passiert?

Welche Vorstellungen hast du im Laufe der Vorstellungsübung aufgebaut?"

Im Anschluss an diese Vorstellungsübung ist eine Diskussion der Schülerinnen und Schüler über ihre Vorstellungen und ihre Erfahrungen während der Übung unabdingbar. Aus eigener Erfahrung läuft eine solche Diskussion meist ohne einen Anstoß geben zu müssen automatisch an. Gleichwohl greifen die Lernenden in diesen Diskussionen meist (noch) nicht auf das wünschenswerte Fachvokabular zurück, die Ausführungen müssen daher oftmals sprachlich unpräzise bleiben. Und das ist in dieser Phase des Unterrichts auch durchaus legitim. Das hohe Mitteilungsbedürfnis, das Austauschen von Vorstellungen beispielsweise durch das Zeichnen eines entsprechenden Bildes (siehe Abb. 2) und das Entwickeln von Begrifflichkeiten zur besseren Strukturierung des Erlebten stehen im Fokus und sollen nicht durch die Lehrkraft unterbrochen bzw. in vorgefertigte Bahnen gelenkt werden.

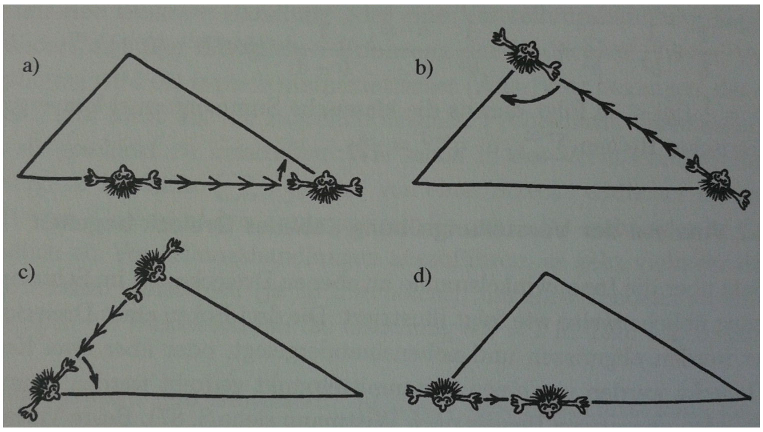

Abb. 2: Gedankliches Bild zur Vorstellungsübung (aus Weber 2007)

Folgende Einsichten sollen die Schülerinnen und Schüler bei der obigen Vorstellungsübung erlangen:

- Die drei Drehungen des eigenen Körpers finden gleichsinnig statt und addieren sich zu einer Gesamtdrehung.
- Die Gesamtdrehung während der Vorstellungsübung beträgt exakt 180°.
- Der Wert von 180° ist unabhängig von der Wahl des konkreten Dreiecks.
- Mit einer analogen Vorstellungsübung kann man auch die Innenwinkelsumme von Vierecken, Fünfecken usw. phänomenologisch erkunden.

Weber (2007) berichtet in seinem Buch auch von Problemen bei der Durchführung von Vorstellungsübungen im Unterricht. Er nennt dabei auch Schwierigkeiten, die sich aus dem außermathematischen Handlungszusammenhang ergeben, wie das Weggehen vom Streifen oder die schlechte Kontrollierbarkeit der Drehungen (Schüler berichten von „Wirbeln", in die sie dabei geraten seien). Zur Rolle der Lehrkraft gehört bei der Aufarbeitung der Vorstellungsübung natürlich auch, die berichteten Erfahrungen zu sammeln, gedanklich zu sortieren und die dabei gewonnenen mathematischen Einsichten zu konsolidieren. Oftmals ergibt sich dabei ein mathematischer Begriff auf ganz natürliche Weise – im vorliegenden Fall beispielsweise der Begriff „Innenwinkelsumme".

Im Vergleich zum Vorgehen in Abb. 3, das von vielen Schulbüchern als Einstieg in die Erarbeitung des Innenwinkelsummensatzes verwendet wird, ergeben sich aus der Vorstellungsübung folgende Vorteile (vgl. Weber 2007):

- Die Innenwinkel werden nicht als statische Winkel eines bestimmten Dreiecks wahrgenommen, sondern als dynamische Drehwinkel.
- Es wird bei der Vorstellungsübung sofort einsichtig, dass es sich bei der Gesamtdrehung um eine exakte Halbdrehung des eigenen Körpers handelt. Bei Verwendung eines konkreten Papierdreiecks bleibt unter Umständen die Frage offen, ob der Gesamtwinkel genau 180° ist (insbesondere dann, wenn das Dreieck nicht präzise ausgeschnitten wird).
- Die Anleitung zu den Vorstellungen ist eigentlich eine Anleitung zu „Vorstellungshandlungen“. Es wird nicht ein mathematisches Objekt bearbeitet (wie beim Papierdreieck), sondern eine mathematische Tatsache wird durch eine gedachte Bewegung am eigenen Körper erfahren.
- Durch das Nachspielen der Handlungen an einem konkreten Dreieck, das im Klassenzimmer ausgelegt (oder mittels Klebestreifen realisiert) wird, kann auch der optische Wahrnehmungskanal angesprochen werden und die haptische Erfahrung tritt noch stärker in den Vordergrund.

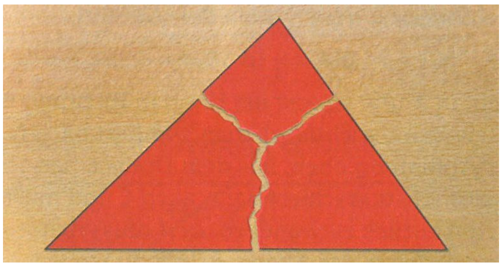

Abb. 3a: Zerteiltes Papierdreieck (aus Reichel und Humenberger 2011)

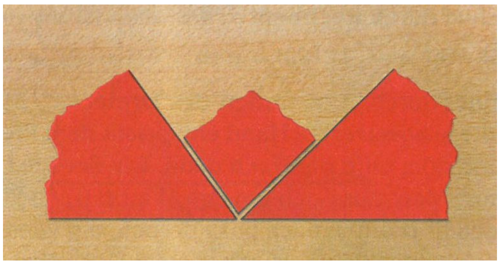

Abb. 3b: Die Teile des Papierdreiecks aus Abb. 3a geeignet zusammengelegt (aus Reichel und Humenberger 2011)

2.2 Weitere Ideen für Vorstellungsübungen

Im Buch von Weber (2007) findet man einige weitere Vorschläge für Vorstellungsübungen. Die meisten davon eignen sich für den Einstieg in das jeweilige Thema, nicht alle dabei angesprochenen Themen sind aber zentral für den Mathematikunterricht der Sekundarstufen. Ideal einsetzbar ist beispielsweise die Vorstellungsübung zur geometrischen Reihe (siehe Weber 2007, S. 27), die in bestechend einfacher Form zur Einsicht führen soll, dass eine Summe unendlich vieler Summanden endlichen Wert haben kann.

Der Autor versucht mit seinem Buch natürlich auch zu bezwecken, dass sich die Leserin bzw. der Leser selbst über Situationen bzw. Inhalte des Mathematikunterrichts Gedanken macht, die sich für eine Vorstellungsübung eignen könnten.

3 Das Ende zuerst

Wie die Überschrift suggeriert, geht es bei diesem Einstieg darum, das vermeintliche Ziel einer Unterrichtssequenz an ihren Beginn zu stellen. Diese Methode ist prinzipiell an vielen Stellen des Curriculums einsetzbar, hier soll sie anhand des Themas „Funktionsuntersuchungen mit Differentialrechnung“ veranschaulicht werden.

Das Ziel und letztlich auch eine außermathematische Rechtfertigung für die Behandlung des Themas im Schulunterricht ist üblicherweise die Bearbeitung von Extremwertaufgaben. Sie machen deutlich, warum man sich in den Wochen davor mit der Analyse von Funktionsgraphen, dem Ermitteln von Kandidaten für lokale Extremstellen und den Unterschieden zu globalen Extremstellen beschäftigen musste. Gerade weil der Weg bis hin zu den Extremwertaufgaben ein sehr zeitaufwändiger und ein für Schülerinnen und Schüler nur schwer überblickbarer ist, lohnt sich gleich zu Beginn ein Blick auf das Ziel, auf jene Aufgaben, die am Ende der Differentialrechnung der 11. Schulstufe gelöst werden sollen.

Es werden relativ wenige Voraussetzungen für eine Beschäftigung mit den nachstehenden Arbeitsaufträgen benötigt. Jedenfalls sollten schon Polynomfunktionen und ihre graphische Darstellung behandelt worden sein. Ist dies gewährleistet, können die Lernenden selbstständig in kleinen Gruppen an den Aufgaben arbeiten.

Aufgabe 1: Ausgangsmaterial ist ein Rechteck aus Papier mit den Maßen 21 cm mal 10 cm. Ihr sollt nun aus diesem Rechteck eine „oben offene Schachtel" mit möglichst großem Volumen basteln, und zwar so: Schneidet an den vier Ecken gleich große Quadrate aus, sodass man die verbleibenden Rechtecke I, II, III und IV an den strichlierten Linien hochklappen kann (siehe Abb. 4)! Überlegt vor dem Schneiden, wie groß die Kantenlänge eurer Quadrate sein soll, um eine Schachtel mit möglichst großem Volumen zu erhalten! Für welche Kantenlänge entscheidet ihr euch?

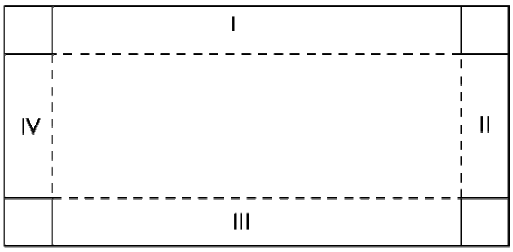

Abb. 4: Rechteck als Basis für die oben offene Schachtel

Aufgabe 1 zielt auf eine Beschäftigung mit dem Phänomen „Optimalität" ab. Den Schülerinnen und Schülern soll durch die Arbeit mit dem konkreten Papierrechteck deutlich werden, dass die Ausgangsmaße des Rechtecks noch nicht das Volumen der fertigen Schachtel festlegen. Auch wenn eine Vergrößerung der weggeschnittenen Quadrate zu einer Verkleinerung der Grundfläche bei gleichzeitiger Vergrößerung der Höhe der Schachtel führt, heißt das nicht, dass sich diese beiden gegensinnigen Veränderungen bei der Berechnung des Volumens ausgleichen! Diese Tatsache mag primitiv erscheinen, die Erfahrung in der Arbeit mit den Lernenden zeigt aber, dass dies für sie aber keineswegs selbstverständlich ist. Diese erste Aufgabe soll also in einem propädeutischen Sinne zur Einsicht führen, dass die Beschäftigung mit Extremwertaufgaben keinesfalls nur theoretisch von Interesse ist. Unterstützt wird die eben beschriebene Erfahrung durch einen Vergleich der Ergebnisse aus Aufgabe 2.

Aufgabe 2: Berechnet, welche Kantenlängen eure Schachtel hat! Welches Volumen hat eure Schachtel?

Aufgabe 2 hat insofern motivierenden Charakter für die Schülerinnen und Schüler, als sie den Wettbewerb um die größte Schachtel zwischen den einzelnen Gruppen anheizt. Durch gezieltes Probieren gelangen die Schülerinnen und Schüler meist sehr nahe an den optimalen Wert der Kantenlänge der wegzuschneidenden Quadrate. Viele Gruppen entscheiden sich beispielsweise für eine Kantenlänge von 2 cm.

Aufgabe 3 zielt nun auf ein allgemeineres Verständnis des Phänomens ab. Es wird zwar weiterhin am konkreten Rechteck mit den oben angegebenen Maßen gearbeitet, die Kantenlänge der wegzuschneidenden Quadrate wird nun aber variabel gelassen.

Aufgabe 3: Wir bezeichnen die Kantenlänge der wegzuschneidenden Quadrate mit x. Berechnet ganz allgemein (d. h. in Abhängigkeit von x) das Volumen $V(x)$ der Schachtel!

Dieser Arbeitsauftrag führt zur Funktionsgleichung einer Polynomfunktion V:

$$V(x) = (21-2x)\cdot(10-2x)\cdot x = 4x^3 - 62x^2 + 210x$$

Mit ihr wird in Aufgabe 4 weitergearbeitet.

Aufgabe 4: Zeichnet den Graphen der Funktion V im Intervall $[0{,}5]$ mit Hilfe des Computers! Begründet, warum der Funktionsgraph nur im angegebenen Intervall interessant ist! An welcher Stelle nimmt die Funktion V den größten Wert an? Was bedeutet das für die optimale Schachtel?

Den Funktionsgraphen der Funktion V kann man in Abbildung 5 sehen. Das globale Maximum im Intervall $[0{,}5]$ liegt etwa an der Stelle $x = 2{,}1$, was bestätigt, dass die Wahl von 2 cm als Kantenlänge gut, aber nicht optimal ist.

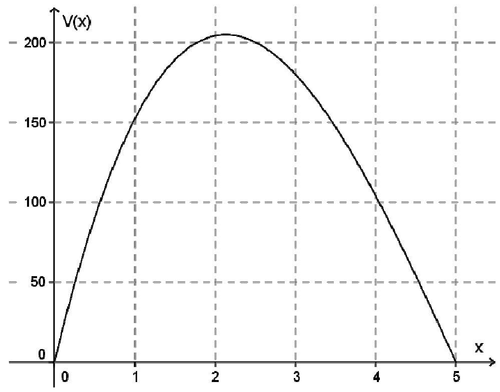

Abb. 5: Funktionsgraph der Funktion *V* aus Aufgabe 3

Als Abschluss dieses Arbeitsauftrags soll die Frage thematisiert werden, wie man diesen Wert von etwa 2,1 cm auch mathematisch exakt berechnen könnte. War im Unterricht davor schon die Rede davon, dass die erste Ableitung an einer Stelle als Steigung des Funktionsgraphen an dieser Stelle interpretiert werden kann, werden die Schülerinnen und Schüler möglicherweise selbst auf die Idee kommen, dass man bei Aufgaben dieser Art nach jenen Stellen suchen muss, an denen die Steigung des Funktionsgraphen, also die Ableitung den Wert Null besitzt. Ist dieser Zusammenhang noch nicht behandelt worden, kann die Aufgabe zum Anlass genommen werden, ihn herauszuarbeiten.

Das Weittragende an dieser Form des Unterrichtseinstiegs ist, dass die für den Einstieg verwendete Aufgabe immer wieder als bereits bekannter Kontext benutzt werden kann, um neue Inhalte anschaulich einzuführen. Beispielsweise kann die Tatsache, dass als globale Extremstellen in einem Intervall nur die lokalen Extremstellen im Intervall sowie die beiden Randstellen des Intervalls in Frage kommen, mit Rückbezug auf die Schachtelaufgabe thematisiert werden. Die Berechnung der zweiten Ableitung ist bei Extremwertaufgaben also verzichtbar!

Dieser Zugang hat aber noch weitere Vorteile: Ausgangspunkt war eine haptische Tätigkeit der Schülerinnen und Schüler, die in eine Aufgabenstellung mit Wettbewerbscharakter verpackt war. Beides kann für Lernende motivierende Funktion haben. Und doch ist dieser Einstieg nicht Selbstzweck – es wird gerade umgekehrt durch diese Herangehensweise ein Bedürfnis geschaffen, sich für Funktionsuntersuchungen zu interessieren. Das Unterrichtsziel wird also schon zu Beginn des doch sehr umfangreichen und daher für Schülerinnen und Schüler oftmals schwer überblickbaren Themenbereichs offenbar. Selbstverständlich soll mit dieser Einstiegsaufgabe noch keine umfassende Extremwertstellentheorie betrieben werden. Vielmehr geht es um die Vermittlung der Idee, wozu man Extremstellen überhaupt benötigt (vgl. Meyer 2014).

4 Erzähle eine Geschichte

4.1 Nicht ganz ernst gemeinte Geschichten

Häufig findet man in Lehrerzeitschriften gute Ideen für Unterrichtseinstiege, die auf dem Erzählen einer Geschichte basieren. In vielen Fällen vereinfachen die Geschichten die Realität allerdings so sehr, dass der Kontext eigentlich als künstlich bezeichnet werden muss. Einerseits ist das natürlich schade und kann bei den Schülerinnen und Schülern dazu führen, dass sie den Mathematikunterricht als realitätsfern oder gar realitätsfremd empfinden. Andererseits wäre es in manchen Fällen auch schade, auf solche Geschichten zu verzichten, insbesondere wenn sie einen gewissen Witz oder eine interessante Botschaft haben.

Als Beispiel könnte man eine Geschichte aus der Literatur anführen, die als Ziel den Satz des Pythagoras hat. Man findet sie bei Wagenführ (2001). Es geht – grob gesprochen – darum, dass drei Bauern eines kleinen Dorfes jeweils ein Tausch von Feldern angeboten wird, um den Bau einer Umfahrungsstraße realisieren zu können. Wie es der Zufall so will, besitzen alle drei Bauern jeweils zwei exakt quadratische Felder, die sie gegen ein jeweils größeres quadratisches Feld eintauschen können. Beim ersten Bauern führt das zu einem flächenmäßig ausgewogenen Tausch, der zweite Bauer gewinnt durch den Tausch sogar Ackerland dazu, während der dritte Bauer einen schlechten Handel eingeht (siehe Abb. 6).

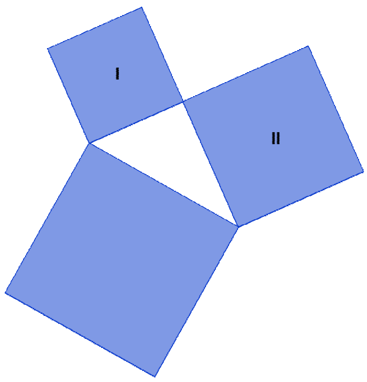

Abb. 6a: Feldertausch des ersten Bauern

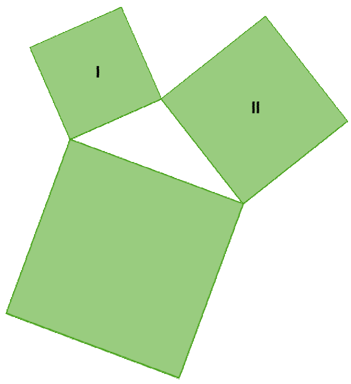

Abb. 6b: Feldertausch des zweiten Bauern

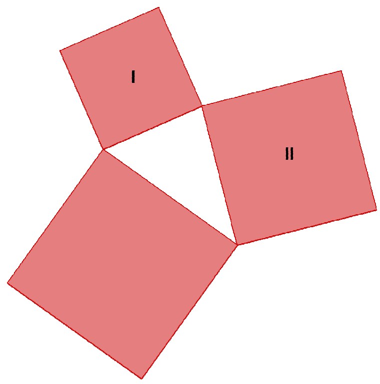

Abb. 6c: Feldertausch des dritten Bauern

Abhängig ist das natürlich von – und darauf sollen die Schülerinnen und Schüler selbst kommen – der Größe des Winkels zwischen den beiden Feldern mit den Beschriftungen I und II. Findet man zwischen den drei Quadraten ein exakt rechtwinkeliges Dreieck (wie in Abb. 6a), dann ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate I und II exakt gleich dem Flächeninhalt des dritten Quadrats. Ist das Dreieck jedoch spitz- bzw. stumpfwinkelig, ergibt sich als Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate I und II ein kleinerer bzw. größerer Wert als der Flächeninhalt des dritten Quadrats. Durch diese Geschichte wird also auf ganz natürliche Weise plausibel, dass beim Satz des Pythagoras beide Richtungen stimmen: Für ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c gilt: Das Dreieck ist rechtwinkelig mit Hypotenusenlänge c genau dann, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Klarerweise muss im Unterricht eine Phase anschließen, in der der Satz des Pythagoras bewiesen wird. Dafür findet man in der Literatur und in Schulbüchern eine Fülle von Ideen.

Wichtig ist bei solchen Geschichten, den Schülerinnen und Schülern gegenüber ehrlich zu bleiben und deutlich zu machen, dass die Geschichte bewusst künstlich gewählt worden ist, um sie von der Komplexität her den zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln zugänglich zu machen. Sind diese unrealistischen Geschichten eine humorvolle, aber behutsam und nicht zu häufig eingesetzte Ausnahme, ist nichts gegen ihren Einsatz einzuwenden. Eine witzige Geschichte für den Einstieg in die Trigonometrie findet man übrigens auf Youtube unter dem Stichwort „Die Erfindung der

Trigonometrie“. Die Geschichte kann bei Präsentation durch die Lehrkraft natürlich etwas abgewandelt werden.

4.2 Eine etwas ernstere Geschichte

Folgende Situation ist tatsächlich auf ähnliche Weise bei einer Gerichtsverhandlung in Wien beschrieben worden:

Auf ein Geschäft wurde ein Überfall begangen, den mehrere bewaffnete Täter durchgeführt haben. Der Verkäufer erlitt einen Streifschuss an der Schulter. Danach traf die Kugel noch die Wand hinter dem Verkäufer. Aus den Ermittlungen der Polizei gingen folgende Abmessungen hervor:

- Horizontalabstand zwischen Täter 1 und Einschussloch in der Wand: 10,8 m
- Horizontalabstand zwischen Täter 1 und Verkäufer: 6,8 m
- Schulterhöhe des Verkäufers: 1,6 m
- Höhe des Einschusslochs in der Wand: 2,4 m

Arbeitsauftrag an die Schülerinnen und Schüler: Versucht mit Hilfe mathematischer Methoden herauszufinden, ob Täter 1 den Verkäufer angeschossen haben kann!

Dieser Arbeitsauftrag könnte an den Beginn einer Unterrichtsstunde gestellt werden, vor der der Strahlensatz behandelt wurde. Er fordert die Lernenden dazu auf, sich zur beschriebenen Situation ein Bild zu machen. Es handelt sich im weiteren Sinn um eine Modellierungsaufgabe, insbesondere wenn den Schülerinnen und Schülern keine Skizze zur Verfügung gestellt wird und sie selbst ein reales Modell zu dieser Situation entwerfen müssen. Dabei könnte eine Graphik wie in Abb.7 entstehen. In diesem Realmodell wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass die Waffe von Täter 1, die Schulter des Verkäufers und das Einschussloch in der Wand kollinear sind – eine Annahme, die nicht unbedingt gerechtfertigt sein muss (z. B. dann, wenn Täter 1 gar nicht geschossen hat). Führt das Modell also dazu, dass Täter 1 tatsächlich unter Verdacht bleibt, so ist über diese Annahme noch einmal nachzudenken.

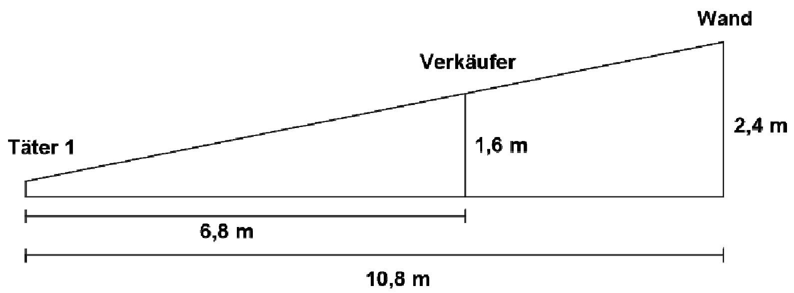

Abb. 7: Realmodell zum Arbeitsauftrag

Ergänzt man nun die Figur zu einem Dreieck (siehe Abb. 8), so erkennt man, dass der Strahlensatz zur Anwendung kommen kann – immerhin findet man in dieser Abbildung drei ähnliche Dreiecke. Man erhält schließlich für die Strecke x einen Wert von 24 cm. Täter 1 müsste also seine Waffe zum Zeitpunkt des Schusses in einer Höhe von 24 cm gehalten haben. Das klingt natürlich nicht sehr plausibel und entlastet ihn vom Verdacht der Körperverletzung.

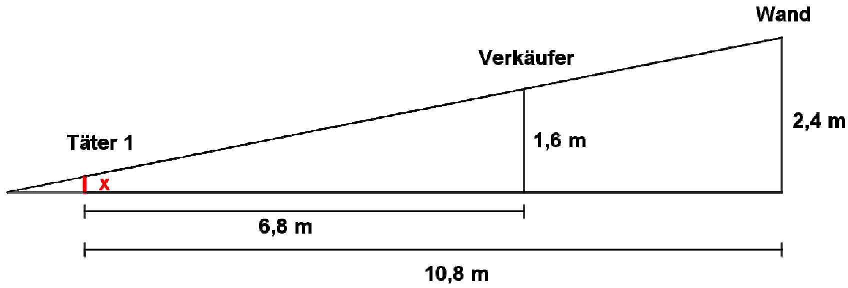

Abb. 8: Die Figur aus Abb. 7 ergänzt zu einem Dreieck

5 Ein mathematikhaltiges Experiment als Einstieg

Schülerexperimente sind als Methode aus dem modernen Physikunterricht kaum wegzudenken. In den Mathematikunterricht finden sie allerdings – vor allem was die Oberstufe angeht – nur zaghaft Eingang. Dabei gäbe es viele Gelegenheiten, ein Experiment an den Beginn eines neuen Themas zu stellen. Es würde sich dadurch eine wunderbare Gelegenheit für Schülerinnen und Schüler bieten, sich spielerisch mit einem Phänomen vertraut zu machen, propädeutische Vorerfahrungen für die spätere Behandlung des Themas zu sammeln und die Notwendigkeit der Einführung neuer Begriffe in einer konkreten Situation zu erfahren.

5.1 Entenrennen

Die Stochastik ist ein Themengebiet, das Schülerinnen und Schülern meist große Schwierigkeiten bereitet. Nicht zuletzt liegt das auch daran, dass stochastische Methoden kaum selbstständig mit Alltagserfahrungen in Zusammenhang gebracht werden können. Gerade umgekehrt werden Lernende häufig durch Vorerfahrungen (beispielsweise aus Würfelspielen) zu irrationalen Annahmen „verführt". In einem Unterrichtsgespräch mit Schülerinnen und Schülern der 7. Klasse sind etwa folgende Aussagen gemacht worden:

- Bei „Mensch ärgere dich nicht" kommen bei mir immer viel weniger Sechser!
- Wenn mein Würfel ein paar Runden keinen Sechser bringt, tausche ich ihn gegen einen anderen. Würfle ich dann wieder keine Sechser, tausche ich den Würfel wieder zurück.
- Wenn mein Würfel fünfmal hintereinander keinen Sechser gezeigt hat, dann muss ja bald wieder einer kommen!

Es ist daher die Aufgabe eines guten Stochastikunterrichts, den Schülerinnen und Schülern die Chance zu geben, objektivierbare Erfahrungen zu machen. Das kann beispielsweise durch das folgende, primitive „Entenrennen" gelingen (Idee nach Malle et al. 2011):

Als Material bekommen die Schülergruppen sechs Spielzeugenten mit den Nummern 1 bis 6. Jede Schülerin und jeder Schüler wählt eine Ente. Es wird reihum mit *einem* Würfel gewürfelt – die entsprechende Ente darf einen Schritt nach vorne ziehen. Es gewinnt jene Ente, die nach 100 Würfen am weitesten vorne liegt.

Auch wenn die bei diesem „Experiment" zu gewinnende Erkenntnis aus der Sicht eines Mathematiklehrers recht dürftig zu sein scheint, kann sie doch dazu beitragen, die Vorstellungen, die den oben aufgelisteten Aussagen zugrunde liegen, zu hinterfragen: unterschiedliche Schülergruppen werden unterschiedliche Siegerenten haben; fasst man die Ergebnisse aller Entenrennen in der Klasse zusammen, werden die Enten gemäß dem empirischen Gesetz der großen Zahlen in etwa gleichauf liegen; es kann die Erfahrung gemacht werden, dass sich der Würfel eben nicht „merkt", welche

Augenzahlen er in den letzten Runden gezeigt hat; es kann aus den gesammelten Daten erkannt werden, dass nach jeweils einer langen Serie ohne Sechser (z. B. zwanzig Mal) jede der sechs Augenzahlen mit der (annähernd) gleichen Häufigkeit als nächste Zahl auftritt;

Als nächsten Schritt kann man das Entenrennen etwas erweitern:

Die Schülerinnen und Schüler bekommen diesmal elf Enten mit den Nummern 2 bis 12. Wieder wählt jede Schülerin und jeder Schüler eine Ente aus. Nun wird mit zwei Würfeln gewürfelt und die Augensumme gebildet – die entsprechende Ente darf einen Schritt nach vorne ziehen. Es gewinnt die Ente, die nach 100 Würfen am weitesten vorne liegt.

Diese Version des Entenrennens bietet einen wunderbaren Einstieg zu diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Einleiten kann man dies durch die Aufforderung, ein Stabdiagramm mit den relativen Häufigkeiten der einzelnen Augensummen aus dem Experiment anzufertigen. Dabei entsteht in aller Regel eine annähernd dreiecksförmige Häufigkeitsverteilung (vgl. Abb. 9, die aus realen Daten eines Entenrennens mit 100 Würfen entstanden ist).

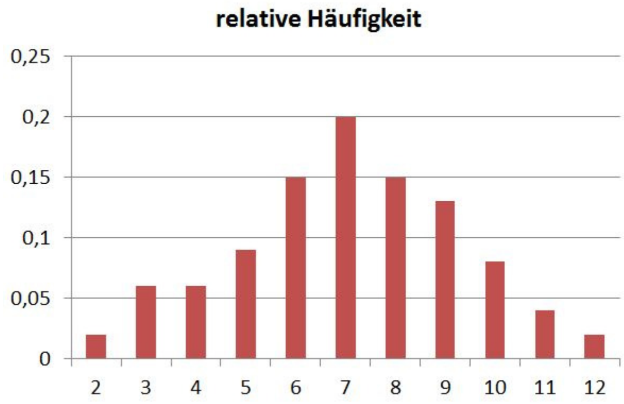

Abb. 9: Häufigkeitsverteilung bei einem realen Entenrennen

Basierend auf den Erfahrungen aus dem Spiel und der Form der Häufigkeitsverteilung kann die Frage „War es Glück, dass die Ente mit der Nummer *n*“ gewonnen hat, oder konnte man das vorausahnen?“ dazu überleiten, sich Gedanken über die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Augensummen zu machen. Der Hinweis, nach der Anzahl der Möglichkeiten zu suchen, mit der eine bestimmte Augensumme zustande kommen kann, löst bei den Schülerinnen und Schülern unmittelbar Diskussionen aus. Haben die beiden Würfel im Spiel unterschiedliche Farben, gelingt es den Lernenden leichter, beispielsweise 2+3 und 3+2 als zwei *unterschiedliche* Realisierungen der Augensumme 5 zu erkennen.

Eine graphische Darstellung dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung mittels Stabdiagramm zeigt eine exakte Dreiecksverteilung – die Form der Häufigkeitsverteilung aus dem Experiment war also kein Zufall! An dieser Stelle kann das empirische Gesetz der großen Zahlen abermals nachempfunden werden, indem die Wurfanzahl von 100 auf beispielsweise 500 erhöht wird (das Zusammenfassen der Daten aller Schülergruppen stellt eine zeitschonende Alternative dar).

5.2 Weitere Ideen für Experimente

Ein sehr bekanntes Experiment ist das sogenannte „Reißnagelwerfen“. Es kommt meist als Veranschaulichung der exponentiellen Abnahme zum Einsatz. Dabei werden z. B. 100 Reißnägel aus einem Becher auf den Tisch gestreut und die „flach“ aufliegenden Reißnägel werden aussortiert. Mit den verbliebenen Reißnägeln wird nun weitergearbeitet. Sie kommen wieder in den Becher, werden auf den Tisch gestreut usw. In jedem Schritt wird die Anzahl der verbliebenen Reißnägel bestimmt. Kern dieses Experiments und der damit in Verbindung stehenden Schüleraktivitäten ist natürlich zu erkennen, dass diese Anzahl annähernd exponentiell abnimmt. In jedem Schritt bleibt nur ein bestimmter Prozentsatz der Reißnägel übrig! Alternativ kann man auch die Höhe einer Bierschaumkrone in Abständen von wenigen Sekunden messen – auch diese Höhe nimmt nämlich annähernd exponentiell ab.

Füllexperimente können dazu dienen, Volumenvergleiche durchzuführen und so auf Volumenformeln für bekannte Körper zu kommen. Beispielsweise passt das Volumen einer Pyramide genau dreimal in das Volumen eines Prismas mit gleicher Grundfläche. Das legt die Volumenformel $V = \frac{G \cdot h}{3}$ nahe, die z. B. in der 8. Klasse mit Hilfe der Integralrechnung bewiesen werden kann. Analog kann durch einen Flächenvergleich plausibel gemacht werden, dass die Oberfläche einer Kugel exakt viermal so groß ist wie der Flächeninhalt der Schnittfläche durch den „Äquator der Kugel" (siehe Abb. 10a).

Abb. 10a: Flächenvergleich bei der Kugel mit Hilfe einer Schnur (aus Schmidt 2006)

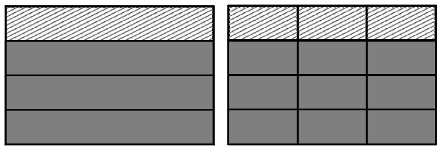

Abb. 10b: Faltexperiment zum Erweitern von Brüchen

Durch Faltexperimente kann die Erkenntnis gewonnen werden, dass das Erweitern von Brüchen den Wert des Bruches nicht ändert (siehe Abb. 10b).

All diese Vorschläge können durch interessierte Leserinnen und Leser zu kreativen und handlungsorientierten Einstiegen in die entsprechenden Themen ausgebaut werden.

6 Weitere Ideen für Unterrichtseinstiege

Dem Motto „Es muss nicht immer aufregend sein" folgend, können auch durchgerechnete Musteraufgaben aus Schulbüchern dazu genutzt werden, schülerzentriert in ein Thema einzusteigen. Sehr häufig starten Lehrkräfte damit in ein neues Thema, dass sie eine prototypische Aufgabe im fragend-entwickelnden Unterrichtsstil an der Tafel lösen. Die Wortmeldungen der Schülerinnen und Schüler werden dabei durch die Lehrkraft beurteilt und je nachdem, wie zielführend sie sind, verworfen oder in den Lösungsprozess aufgenommen. Diese Methode hat sich bewährt, da sie effizient und ohne Umwege zur intendierten Lösungsmethode und damit auch zum gewünschten Ergebnis führt – etwas anderes würde die Lehrkraft hier gar nicht zulassen! Sicherlich ist es sinnvoll, Lernende nicht gleich selbst mit dem meist schwierigen Aufgabenlöseprozess alleine zu lassen. Ihnen fehlt zu Beginn eines neuen Themengebiets schlicht die Erfahrung, manchmal fehlen sogar die nötigen Werkzeuge. Insgesamt würde das die kognitiven Kapazitäten der Schülerinnen und Schüler an dieser Stelle des Lernprozesses übersteigen. Eine Alternative zum herkömmlichen Vorgehen ist allerdings das Arbeiten mit Musterlösungen. Man kann beispielsweise Schülerinnen und Schüler in Paaren an durchgerechneten Musteraufgaben aus dem Schulbuch arbeiten lassen, sie die verwendeten Strategien selbst entdecken und verbalisieren lassen und den Transfer auf ähnliche Aufgaben fordern. Das macht die Lernenden viel mehr für ihren Lernprozess verantwortlich als der fragend-entwickelnde Unterricht, bei dem Wortmeldungen einiger weniger Schülerinnen und Schüler für eine erfolgreiche Bearbeitung ausreichen. Umgekehrt werden die Lernenden bei dieser Methode aber nicht mit dem kognitiv anspruchsvollen Problemlösen konfrontiert (vgl. Renkl et al. 2001).

Selbstverständlich kann auch ein mathematischer Zaubertrick einen gelungenen Einstieg in ein neues Thema darstellen. Ziel im Unterricht muss dabei allerdings sein, dass die Mathematik zur Erklärung des Tricks im Vordergrund steht und nicht nur das verblüffende Phänomen! Ideen für mathematikhaltige Zaubertricks findet man im Artikel von Kadan in diesem Heft.

Eine ganz besondere Erfahrung kann es sein, in ein Thema entlang seiner geschichtlichen Entwicklung einzusteigen. Dabei kann erlebt werden, dass die Mathematik keine fertige, immer schon bestehende Ansammlung von Wissen ist, sondern sich im Laufe der Zeit weiterentwickelt hat und dabei durch die Anstrengungen und kreativen Ideen vieler Menschen getragen wurde und wird. Ein Beispiel für einen solchen historisch-genetischen Zugang findet man bei Humenberger (2011), der zeigt, wie die komplexen Zahlen in die Mathematik gekommen sein können. Einstiege dieser Art bieten sich etwa auch bei den Themen „Primzahlen und Teilbarkeit", „negative Zahlen" oder „Differentialrechnung" an.

Manchmal reicht sogar das kommentarlose Präsentieren einer oder mehrerer Bilder für den Einstieg in ein neues Thema. Das Bild muss dabei natürlich so ausgewählt werden, dass es zum Nachdenken, zum Mathematisieren oder schlicht zum Diskutieren mit Hilfe mathematischer Fachsprache anregt. Letzteres erreicht ein sehr gelungener Einstieg in das Thema „Manipulation statistischer Darstellungen" in Halbach (2001). Konfrontiert mit vier auf unterschiedliche Weise manipulierten Darstellungen derselben Ausgangsdaten werden die Schülerinnen und Schüler in die Rolle von Zeitungsjournalisten versetzt. Je eine Schülergruppe soll eine Schlagzeile sowie eine Kurzmeldung zu je *einer* der Darstellungen verfassen. In einer gemeinsamen Redaktionssitzung aller Gruppen sollen sie dann die unterschiedlichen Vorschläge und die zugrunde liegenden statistischen Darstellungen diskutieren. Ziel dieses Einstiegs soll sein, dass Schülerinnen und Schüler in eigenständiger Arbeit dafür sensibilisiert werden sollen, welche Möglichkeiten für Verfälschungen und Manipulationen von Daten üblicherweise eingesetzt werden, um bestimmte Eindrücke zu erzeugen bzw. bestimmte Meinungen zu untermauern.

Literatur

Ambrus, G.; Wagner, A. (2013): Der erste Eindruck entscheidet! Über die Kunst, gute Einstiegsaufgaben zu stellen – am Beispiel der Multiplikation von Brüchen. In: *Praxis der Mathematik für die Schule 50*, 43-47.

Elbs, P. et al. (2007): *Einblicke 7. Mathematik*. Stuttgart: Klett.

Grell, J.; Grell, M. (1983): *Unterrichtsrezepte*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag

Halbach, A. (2001): Eine Statistik – Viele Interpretationen. In: *mathematik lehren*, 109, 46-48.

Humenberger, H. (2011): Wie können die komplexen Zahlen in die Mathematik gekommen sein? – Gleichungen dritten Grades und die Cardano-Formel. In: Henning, H.; Freise, F. (Hrsg.): *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, ISTRON-Schriftenreihe*, 17, 31–45. Hildesheim: Franzbecker.

Malle, G. et al. (2011): *Mathematik verstehen 7*. Wien: öbv.

Meyer, D. (2014): Differenzierende Einstiege. In*: Der Mathematikunterricht* 60, Heft 3, 19-27.

Reichel, H.-Ch.; Humenberger, H. (2011, Hrsg.): *Das ist Mathematik 2*. Wien: öbv.

Renkl, A., Schworm, S.; vom Hofe, R. (2001): Lernen mit Lösungsbeispielen. In: *mathematik lehren* 109, 14-18.

Schmidt, G. (2006): Mathematik zum Anfassen im alltäglichen Mathematikunterricht. In: *Der Mathematikunterricht* 52, Heft 4, 46-62.

Wagenführ, K. (2001): Gebietsreform in Feldhausen – Eine Einführung in den Satz des Pythagoras. In: *mathematik lehren*, 109, 10-13.

Weber, C. (2007): *Mathematische Vorstellungen bilden*. Bern: hep

Verfasser

Christoph Ableitinger
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Oskar Morgenstern Platz 1
1090 Wien

christoph.ableitinger@univie.ac.at